

CON ĐƯỜNG CỦA TƯ DUY

Đề bài: Bài 1: [Click here](#)

Thời gian chạy tối đa: **0.5 giây**

Bài toán đưa về giải hệ sau với các nghiệm nguyên dương m, n :

$$mn + (m+1)(n+1) = 2k \quad (*1)$$

$$|m-n| \rightarrow \min \quad (*2)$$

Trong đó: k là hằng số dương cố định, không thay đổi.

Bài viết này gồm các phần:

Đối với kỳ thi tuyển sinh Đại học khối A	1
Đối với đề thi Olympic Tin học sinh viên, khối chuyên Tin học (thuật toán1)	3
Cách tiếp cận khác (thuật toán2)	5
Kết luận 1	5
Thủ thuật – thuật toán tốt nhất có thể theo suy nghĩ của tư duy [tham lam] (thuật toán3)	6
Đặt vấn đề sang khía cạnh khác (thuật toán4)	6
Kết luận 2	6

Đối với kỳ thi tuyển sinh Đại học khối A

Trong trường hợp m, n, k là số thực dương ($m, n, k \in \mathbb{R}^+, k \geq \frac{1}{4}$) thì bài toán đưa ra xứng đáng là một câu trong đề thi Đại học môn Toán khối A.

Cách giải trong trường hợp tổng quát với m, n, k là số thực dương như sau, **$k \geq 1/4$** (lời giải này của mình có lẽ không được tự nhiên cho lắm):

Ta biến đổi từ (*2):

$$|m - n| \rightarrow \min$$

$$\Leftrightarrow (m-n)^2 \rightarrow \min$$

$$\Leftrightarrow m^2 + n^2 - 2mn \rightarrow \min \quad (1)$$

Ở đây, ta thấy xuất hiện tích mn trong biểu thức tìm min. Ta thấy trong phương trình (*1) chứa tích mn , vậy ta sẽ biến đổi phương trình đó để lấy được giá trị của tích mn để lắp vào (1).

Ta có từ phương trình (*1):

$$mn + (m+1)(n+1) = 2k$$

$$\Leftrightarrow mn = 2k - (m+1)(n+1) \quad (2)$$

Lắp (2) vào (1) ta được điều tương đương là cần tìm:

$$m^2 + n^2 - 2(2k - (m+1)(n+1)) \rightarrow \min$$

$$\Leftrightarrow m^2 + n^2 - 4k + 2(m+1)(n+1) \rightarrow \min$$

$$\Leftrightarrow m^2 + n^2 - 4k + 2mn + 2m + 2n + 2 \rightarrow \min$$

$$\Leftrightarrow (m+n)^2 + 2(m+n) - 4k + 2 \rightarrow \min$$

$$\Leftrightarrow (m+n)^2 + 2(m+n) + 1 - 4k + 1 \rightarrow \min$$

$$\Leftrightarrow (m+n+1)^2 - 4k + 1 \rightarrow \min$$

$$\Leftrightarrow (m+n+1)^2 \rightarrow \min \quad (\text{do } k \text{ là hằng số cố định})$$

$$\Leftrightarrow m + n + 1 \rightarrow \min \quad (\text{do } m, n \in \mathbb{R}^+)$$

$$\Leftrightarrow m+n \rightarrow \min \quad (3) \quad (\text{wow, bạn có thấy thú vị không? Đề bài yêu cầu tìm } |m-n| \text{ min})$$

Bây giờ, ta tìm cách tính giá trị của m qua n . Từ phương trình (*) ta có:

$$mn + (m+1)(n+1) = 2k$$

$$\Leftrightarrow mn + mn + m + n + 1 = 2k$$

$$\Leftrightarrow 2mn + m + n + 1 = 2k$$

$$\Leftrightarrow m(2n+1) = 2k - n - 1$$

$$\Leftrightarrow m = (2k - n - 1) / (2n+1) \quad (4)$$

Lắp (4) vào (3) ta được:

$$m+n \rightarrow \min$$

$$\Leftrightarrow (2k - n - 1)/(2n+1) + n \rightarrow \min$$

$$\Leftrightarrow [2k - 1/2(2n+1) - 1/2]/(2n+1) + n \rightarrow \min$$

$$\Leftrightarrow (2k-1/2)/(2n+1) - 1/2 + n \rightarrow \min$$

$$\Leftrightarrow (2k-1/2)/(2n+1) + 1/2(2n+1) - 1 \rightarrow \min$$

$$\Leftrightarrow (2k-1/2)/(2n+1) + 1/2(2n+1) \rightarrow \min \quad (5)$$

Do đề bài cho $k \geq 1/4$ nên $2k \geq 1/2$ nên $2k - 1/2 \geq 0$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho (5) ta có:

$$(2k-1/2)/(2n+1) + 1/2(2n+1) \geq 2\sqrt{(2k-1/2)/(2n+1) \cdot 1/2(2n+1)}$$

$$\Leftrightarrow (2k-1/2)/(2n+1) + 1/2(2n+1) \geq 2\sqrt{(2k-1/2) \cdot 1/2}$$

Do k là hằng số cố định nên $2\sqrt{(2k-1/2) \cdot 1/2}$ cũng là hằng số cố định.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi:

$$(2k-1/2)/(2n+1) = 1/2(2n+1)$$

$$\Leftrightarrow 2(2k - 1/2) = (2n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2n + 1 = \sqrt{2(2k - 1/2)}$$

$$\Leftrightarrow n = \{ \sqrt{2(2k - 1/2)} - 1 \} / 2 \quad (6)$$

Lắp (6) vào (4) là ta tính được m theo k.

Thử nghiệm:

Với k = 9 thì thử nghiệm trên máy tính Casio Fx 570MS cho ra hai nghiệm vô tỉ m, n với m = n. Và dĩ nhiên |m-n| đạt min bởi giá trị |m-n| = 0 khi đó.

Đối với đề thi Olympic Tin học sinh viên, khối chuyên Tin học (thuật toán1)

Việc m, n là số nguyên dương làm cho bài toán phức tạp hơn so với bài toán tuyển sinh vào Đại học khối A rất nhiều:

Như đã nói ở trên, ta có thể tìm giá trị của m thông qua giá trị của n.

Theo biểu thức (4) ở trên ta có:

$$m = (2k - n - 1) / (2n+1)$$

Mà $m \in \mathbb{Z}^+$ nên:

$$(2k - n - 1) / (2n+1) \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Leftrightarrow [(2k - 1/2(2n+1) - 1/2)] / (2n+1) \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Leftrightarrow (2k - 1/2)/(2n+1) - 1/2 \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Leftrightarrow (4k - 1)/(4n+2) - 1/2 \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Leftrightarrow 1/2 * [(4k - 1)/(2n+1) - 1] \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Leftrightarrow (4k - 1)/(2n+1) - 1 \in \mathbb{Z}^+ \quad (\text{vì nếu } (4k-1) : (2n+1) \text{ thì } (4k - 1)/(2n+1) \text{ chắc chắn là số lẻ})$$

$$\Leftrightarrow (4k - 1)/(2n+1) \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Leftrightarrow 4k - 1 : 2n+1 \quad (7)$$

Từ đây, ta có thể lập trình được rồi:

Ta tìm các ước lẻ của 4k-1 (vì 2n+1 là số lẻ). Với mỗi ước, ta gán 2n+1 cho giá trị của ước lẻ đó rồi tìm ra n ($n \in \mathbb{Z}^+$), sau đó dựa vào biểu thức (4) để tìm ra m thông qua n ($n \in \mathbb{Z}^+$) $\Rightarrow$ Nếu bạn để ý, việc nhận ra chỉ cần tìm các ước lẻ của 4k-1 thôi đã làm cho độ phức tạp của thuật toán giảm đi một nửa rồi (cách này gọi là giảm độ phức tạp dựa vào hình dạng dữ liệu).

$$m = (2k - n - 1) / (2n+1) \quad (8)$$

Sau đó tìm min các cặp (m, n) vừa tìm được.

Ví dụ 1:

$k = 9 \Rightarrow$ theo (7) ta có $4k-1 = 4*9 - 1 = 35 = 1*35 = 5*7$

- Với $2n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0$ (loại)
- Với $2n + 1 = 35 \Rightarrow n = 17$. Theo (8) ta được: $m = 0$ (loại)
- Với $2n + 1 = 5 \Rightarrow n = 2$. Theo (8) ta được: $m = 3$ (thỏa mãn) (9)
- Với $2n + 1 = 7 \Rightarrow n = 3$. Theo (8) ta được: $m = 2$ (thỏa mãn) (10)

Lấy min của hiệu các cặp số (9) và (10) ta thấy (2, 3) và (3, 2) đều thỏa mãn yêu cầu đề bài, tức là giá trị $|m-n|$ của chúng khi đó đạt min.

Ví dụ 2:

$k = 6 \Rightarrow$ theo (7) ta có $4k-1 = 4*6 - 1 = 23 = 1*23$

- Với $2n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0$ (loại)
- Với $2n + 1 = 23 \Rightarrow n = 11$. Theo (8) ta được: $m = 6/23$ (loại)

Vậy không có cặp số nào thỏa mãn đề bài.

Độ phức tạp của thuật toán

Ta thấy nếu (a, b) là một cặp số thỏa mãn đề bài thì (b, a) cũng là một cặp số thỏa mãn đề bài.

Chính vì vậy trong việc tìm ước của $2n+1$, ta chỉ cần xét các ước lẻ từ 1 tới $\sqrt{4k-1}$ mà thôi. Với mỗi n , ta tìm ngay ra m .

Độ phức tạp của thuật toán là: $T(n) = O(t * 1/2 * \sqrt{4k-1}) = O(t * 1/2 * \sqrt{4k})$

Trong đó: t là số tests đề bài yêu cầu.

Đề bài cho hạn chế như sau:

$$1 \leq t \leq 20$$

$$1 \leq k \leq 10^{12}$$

Thay $t = 20$, $k = 10^{12}$ vào $O(t * 1/2 * \sqrt{4k})$ ta được: $T = 2 * 10^7$

(theo: http://www.wolframalpha.com/input/?i=20*1%2F2*sqrt%284*10^12%29)

Mà một thuật toán $O(n)$ có thể chạy được với $\max n = 10^7$ trong 1 giây (trên máy chấm của SPOJ, máy laptop của mình thì có thể chạy tới $n = 10^8$, nhưng chúng ta không tính laptop cá nhân).

(theo:

http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:EKyDiEKfsAgJ:vnoi.info/index.php%3Foption%3Dcom_fireboard%26func%3Dview%26id%3D59093%26catid%3D4%26Itemid%3D26+&cd=1&hl=vi&ct=clnk&gl=vn)

Như vậy, trong thời gian 2 giây ta hoàn toàn có thể chạy được với $n = 2 \cdot 10^7$. Nhưng đề bài lại yêu cầu phải kết thúc sau 0.5 giây $\Rightarrow$ Bạn phải tìm thuật toán khác, hoặc tinh chế lại thuật toán ở trên.

Cách tiếp cận khác (thuật toán 2)

Giờ đây, ta chú ý tới yêu cầu của bài toán: tìm min của $|m-n|$

Ta thấy rằng nếu (a, b) là nghiệm của hệ thì (b, a) cũng là nghiệm của hệ. Nên không mất tính tổng quát giả sử: $m \leq n$

Vậy nếu $|m-n| = x$ ($x \in \mathbb{Z}^+$) thì:

$$n - m = x$$

$$\Leftrightarrow n = m + x \quad (9)$$

Thay (9) vào (*) ta được:

$$mn + (m+1)(n+1) = 2k$$

$$\Leftrightarrow m(m+x) + (m+1)(m+x+1) = 2k \quad (10)$$

Phương trình (10) là phương trình bậc hai ẩn m . Độ phức tạp để giải phương trình (10) chỉ là $O(1)$.

Mặt khác, khai triển phương trình (10) để tìm ra thông tin về biến x ta được:

$$x(m+m+1) + [m^2 + (m+1)^2] = 2k$$

$$\Leftrightarrow x(2m+1) + (2m^2 + 2m + 1) = 2k$$

$$\Leftrightarrow x = [2k - 2m^2 - 2m - 1] / (2m+1)$$

Do $m \in \mathbb{Z}^+$ nên $m \geq 1$. Vậy $x \leq k$

Chương trình:

Cho x dần từ 0 trở đi tới k . Với mỗi x , giải phương trình (10) để lấy nghiệm m . Nếu nghiệm $m \in \mathbb{Z}^+$ thì dừng chương trình ngay. Từ m tìm ra n theo công thức (9).

Độ phức tạp trong **trường hợp xấu nhất** khi không tồn tại nghiệm $m \in \mathbb{Z}^+$ là: $T(n) = O(t \cdot k)$

$$\text{Với } t = 20, k = 10^{12} \text{ thì } T = 20 \cdot 10^{12} = 2 \cdot 10^{13} = 2 \cdot 10^6 \cdot 10^7$$

Trong trường hợp này chương trình chạy trong thời gian: $2 \cdot 10^6$ giây ≈ 23 ngày $\Rightarrow$ Không khả thi $\Rightarrow$ Nên tìm cách khác.

(theo: http://www.wolframalpha.com/input/?i=2*10^6+%2F+%2824*60*60%29)

Kết luận 1

Có thể là máy chấm của kỳ thi Olympic Tin học mạnh hơn máy chấm của SPOJ. Nếu máy tính của Olympic Tin học có thể chạy được thuật toán $O(n)$ với $n = 10^8$ trong 1 giây. Thì trong trường hợp bài toán của chúng ta hoàn toàn có thể chạy thuật toán 1 trong vòng 0.5 giây.

Thủ thuật – thuật toán tốt nhất có thể theo suy nghĩ của tư duy [tham lam] (thuật toán3)

Đây là một thuật toán lai ghép hai cách làm trên (nếu máy chấm chỉ chạy được thuật toán $O(n)$ với $n = 10^7$ trong thời gian 1 giây, tức là trong trường hợp của thuật toán 1 là 2 giây).

- Chạy thuật toán thứ 2: Cho x chạy từ 0 tới 1000. Nếu tồn tại nghiệm nào của m thì OK, dừng luôn.
- Nếu không tồn tại nghiệm nào của m thì chạy thuật toán thứ 1.

Ưu điểm của cách làm này: Lấy thời gian của cái tối ưu bù cho thời gian của cái không tối ưu (trường hợp xấu nhất).

Đặt vấn đề sang khía cạnh khác (thuật toán4)

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $m \leq n$.

Từ (*1) ta có:

$$m*m + (m+1)*(m+1) \leq 2k$$

$$\Rightarrow 2m^2 \leq 2k$$

$$\Leftrightarrow m \leq \sqrt{k}$$

Thuật toán

Vậy thuật toán ở đây là: Duyệt m từ 1 tới $\sqrt{k}$. Sau đó với mỗi m thay vào (*1) và ta tìm được n bằng cách giải phương trình bậc hai ẩn n.

Độ phức tạp tính toán: $T(n) = O(\sqrt{k})$

Với $t = 20$ và $k = 10^{12}$ thì $T = 2 \cdot 10^7$. Tức là cũng chẳng tốt hơn so với thuật toán 1. Xét về bản chất thì thuật toán 1 và thuật toán 4 là tương đương nhau.

Kết luận 2

Với mỗi cách tiếp cận, mỗi cái nhìn về dữ liệu ta lại có một thuật toán khác nhau. Mục đích cuối cùng là giảm độ phức tạp của thuật toán đến mức có thể chấp nhận được. Như vậy, thuật toán 3 là lựa chọn tốt nhất trong trường hợp này. Bạn có thể dùng thuật toán 3 để ăn khá nhiều tests.